NURJATI JOURNAL OF MATHEMATICS AND MATHEMATICAL SCIENCES
Publikasi Online : April 2021
Volume 1, Nomor 1, 2021. Hal. 48 – 57
Journal homepage: **www.syekhnurjati.ac.id/jurnal/index.php/njmms**
email: **njmms@syekhnurjati.ac.id** e-issn: xxxxxx

SUKU BANYAK ATAS GELANGGANG KOMUTATIF

Nur Abidatul Mustaqimah[1]
Jurusan Taris Matematika Institut Agama Islam Negeri Syekh Nurjati Cirebon
Jl. Perjuangan, Sunyaragi, Kec. Kesambi, Kode Pos 45132, Kota Cirebon, Indonesia
nurabida@mail.syekhnurjati.ac.id[1]

Abstrak

Artikel ini membahas tentang suku banyak atas gelanggang komutatif. Suku banyak atas gelanggang komutatif adalah suku banyak yang anggota-anggotanya merupakan unsur pada gelanggang komutatif. Selanjutnya, diselidiki struktur yang berlaku pada suku banyak atas gelanggang komutatif dengan operasi penjumlahan dan perkalian suku banyak.

Kata Kunci:gelanggang, suku banyak, suku banyak atas gelanggang, komutatif.

1. PENDAHULUAN

Sistem matematika berupa satu himpunan tak kosong atau lebih yang dilengkapi dengan operasi biner atau lebih yang memenuhi sifat-sifat tertentu (Abdurrazzaq, Wardayani, & Suroto, 2015). Sistem amtematika yang telah dikenal seperti bilangan bulat, bilangan rasional dan bilangan kompleks dengan disertai dua operasi yang didefinsikan sebagai penjumlahan dan perkalian (Setiawan, 2011). Sistem matematika berupa himpunan tak kosong, memenuhi aksioma pada grup komutatif seperti yang telah dikemukaan di atas dengan operasi keduanya memenuhi sifat asosiatif, dan juga sifat keduanya tersebut memiliki sifat distributif terhadap operasi pertamanya disebut dengan gelanggang.

Gelanggang suku banyak merupakan suatu gelanggang dengan unsurnya berupa suku banyak. Suku banyak dapat dikatakan sebagai gelanggang suku banyak karena struktur pada suku bayak memenuhi aksioma-aksioma yang terdapat pada grup komutatif maupun gelanggang. Himpunan suku banyak $R[x]$ dengan keofisien dari gelanggang R juga merupakan sebuah gelanggang suku banyak dengan operasi yang didefinisikan sebagai penjumlahan dan perkalian (Dewi, 2011).

Penelitian ini membahas tentang pembentukan suku banyak atas gelanggang komutatif. Selanjutnya, dengan membentuk suku banyak atas gelanggang komutatif tersebut dapat dibuktikan struktur beserta sifat-sifat yang terdapat pada suku banyak atas gelanggang komutatif.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Suatu struktur yang dilengkapi dengan satu operasi $*$ pada G disebut dengan grup. Perhatikan definisi formal grup yang telah dikemukakan oleh Misri (2017) sebagai berikut.

Definisi 2.1. Suatu himpunan tak kosong G bersama dengan suatu operasi $*$ pada G dinamakan grup terhadap operasi $*$ bila memenuhi aksiomatik grup:

1. Tertutup untuk setiap $\mathrm{a, b} \in \mathrm{G}$ berlaku $\mathrm{a} * \mathrm{b} \in \mathrm{G}$.
2. Asosiatif untuk setiap $\mathrm{a, b, c} \in \mathrm{G}$ berlaku $\mathrm{a} * (\mathrm{b} * \mathrm{c}) = (\mathrm{a} * \mathrm{b}) * \mathrm{c}$.
3. Identitas untuk suatu unsur $\mathrm{e} \in \mathrm{G}$ sedemikian hingga untuk semua $\mathrm{a} \in \mathrm{G}$ berlaku $\mathrm{a} * \mathrm{e} = \mathrm{a} = \mathrm{e} * \mathrm{a}$. Unsur e dinamakan unsur identitas di G.
4. Invers untuk setiap $\mathrm{a} \in \mathrm{G}$ ada unsur $\mathrm{a}^{-1} \in \mathrm{G}$ yang memenuhi $\mathrm{a} * \mathrm{a}^{-1} = \mathrm{e} = \mathrm{a}^{-1} * \mathrm{a}$ unsur a^{-1} dinamakan invers dari unsur a.

Contoh suatu struktur yang merupakan grup diantaranya adalah $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +)$ dan $(\mathbb{R}, +)$ (Wahyuni, Wijayanti, Yuwaningsih, & Hartanto, 2016). Grup dapat dinamakan grup abelian atau komutatif jika operasi pada grup memiliki sifat komutatif.

Suatu grup dapat dikatakan sebagai suatu gelanggang jika grup tersebut memiliki dua operasi yaitu penjumlahan dan perkalian dan memenuhi semua sifat aksiomatik gelanggang. perhatikan definisi gelanggang yang dikemukakan Misri (2010) sebagai berikut.

Definisi 2.2. sebuah himpunan tak kosong R terhadap operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$ dikatakan gelanggang jika memenuhi:

1. $(\mathrm{R}, +)$ membentuk grup komutatif yaitu memenuhi:
   a. Sifat asosiatif yaitu jika memenuhi $(\mathrm{a} + (\mathrm{b} + \mathrm{c}) = (\mathrm{a} + \mathrm{b}) + \mathrm{c}$ untuk setiap $\mathrm{a, b}$ dan c unsur-unsur diR.
   b. Terdapat unsur 0 di R sehingga $0 + \mathrm{a} = \mathrm{a} + 0$ untuk setiap a unsur di R.
   c. Terdapat balikan dari a yaitu $-\mathrm{a}$ sehingga $\mathrm{a} + (-\mathrm{a}) = (-\mathrm{a}) + \mathrm{a} = 0$ untuk setiap a unsur di R.
   d. Sifat komutatif, yaitu jika memenuhi $\mathrm{a} + \mathrm{b} = \mathrm{b} + \mathrm{a}$ untuk setiap a dan b unsur-unsur di R.
2. $(\mathrm{R}, \times)$ memenuhi sifat asosiatif, yaitu $\mathrm{a(bc) = (ab)c}$ untuk setiap $\mathrm{a, b}$ dan c unsur-unsur di R.
3. $(\mathrm{R}, +, \times)$ memenuhi sifat distributif, yaitu $(\mathrm{a} + \mathrm{b})\mathrm{c} = \mathrm{ac} + \mathrm{bc}$ dan $\mathrm{a}(\mathrm{b} + \mathrm{c}) = \mathrm{ab} + \mathrm{ac}$ untuk setiap $\mathrm{a, b}$ dan c unsur-unsur di R.

Contoh gelanggang diantaranya $(\mathbb{Q}, +, \times), (\mathbb{R}, +, \times)$ dan $(\mathbb{C}, +, \times)$.

Pada penulisan artikel ini referensi yang penulis gunakan sebagian besar diambil dari Gallian (2013), Subiono (2016) dan Andari (2017).

3. METODE

Penelitian ini menggunakan metode penelitian studi pustaka *(library research).* Peneliti mengkaji berbagai literatur yang diambil dari buku-buku pustaka dan artikel-artikel yang di unduh dari sumber internet untuk melakukan pembuktian terkait permasalahan yang dikaji dalam penelitian. Teknik yang penulis gunakan adalah teknik pembuktian langsung. Langkah-lagkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah, (a).

mendefinisikian suku banyak dengan unsur-unsurnya gelanggang komutatif, (b). Mendefinisikan himpunan suku banyak atas gelanggang komutatif dengan operasi yang terdapat pada himpunan tersebut, (c). Membuktikan struktur yang terbentuk pada himpunan suku banyak atas gelanggang komutatif adalah suatu gelanggang.

Teknik yang penulis gunakan adalah teknik pembuktian langsung. Teknik pembuktian langsung ini sangat bergantung pada kaidah dasar penarikan kesimpulan dengan menggunakan implikasi yang logis. Lebih lanjut, teknik ini juga menggunkan aturan keputusan dasar seperti modus ponen, modus tollens dan silogisme (Misri, 2019).

4. HASIL DAN DISKUSI

Pada hasil dan diskusi ini dibahas tentang pembentukan suku banyak atas gelanggang dan selanjutnya akan ditunjukkan struktur matematika yang terbentuk dari suku banyak atas gelanggang.

Misalkan R merupakan suatu gelanggang, suku banyak atas gelanggang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 4.1 Misalkan R merupakan gelanggang komutatif dengan unsur satuan. Suku banyak $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ dengan $a_i \in R, i = 0,1, \dots, n$ disebut suku banyak atas gelanggang.

Penulisan suku banyak dapat disederhanakan dengan menggunakan notasi sigma. Suku banyak $p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ dalam notasi sigma dapat dituliskan menjadi $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$. Dalam penulisan suku banyak, a_1x^1 cukup ditulis dengan a_1x dan a_0x^0 ditulis dengan a_0. Selain itu, untuk sebarang a_ix^i yang ada dalam penjumlahan dihilangkan jika $a_i = 0$ dan sebarang a_ix^i dengan $a_i = 1$ ditulis x^i begitu juga dengan $a_i = -1$ ditulis $-x^i$.

Himpunan dari semua suku banyak dalam peubah dan koefisien di gelanggang R ditulis dengan $R[x]$. Dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang sesuai di $R[x]$ dibuat gelanggang $R[x]$. Secara umum, tidak dibedakan antara suku banyak konstan a_0 di $R[x]$ dengan unsur a_0 di R, juga tidak dibedakan suku banyak nol di $R[x]$ dengan unsur 0 di R. Operasi penjumlah dan perkalian pada $R[x]$ didefinisikan sesuai dengan operasi R, dengan demikian gelanggang R merupakan subgelanggang dari gelanggang di $R[x]$.

Definisi 4.2 Jika $f(x), g(x) \in R[x]$ dengan $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ dan $g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_ix^i$, maka didefinisikan penjumlahan dan pekalian sebagai berikut.

(a). $f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\max(n,m)} c_ix^i$, dengan $c_i = a_i + b_i$.

(b). $f(x) \times g(x) = \sum_{i=0}^{\mathrm{n+m}} d_ix^i$, dengan $d_i = \sum_{k=0}^{i} a_k\, b_{i-k} = a_0b_i + a_1b_{i-1} + \cdots + a_{i-1}b_1 + a_ib_0$.

Dengan demikian, operasi penjumlahan dan perkalian terdefinisi dengan baik pada suku banyak atas gelanggang di $R[x]$.

Berikut ini diberikan teorema-teorema untuk himpunan suku banyak atas gelanggang yang disertai dengan operasi penjumlahan dan perkalian.

Teorema 4.3. Jika R adalah suatu gelanggang, maka himpunan $R[x]$ juga merupakan gelanggang yang disebut dengan suku banyak atas gelanggang.

Bukti. Terlebih dahulu akan dibuktikan operasi penjumlahan pada $R[x]$ tertutup. Ambil $f(x), g(x), h(x) \in R[x]$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\max(m,n)} c_i x^i \end{aligned}$$

dengan $c_i = a_i + b_i \in R$. Jadi $f(x) + g(x) \in R[x]$. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa sifat asosiatif penjumlahan berlaku di $R[x]$. Ambil $f(x), g(x), h(x) \in R[x]$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \big(f(x) + g(x)\big) + h(x) &= \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i)x^i + \sum_{i=0}^{p} c_i x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\max(m,n,p)} \big((a_i + b_i) + c_i\big)x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\max(m,n,p)} \big(a_i + (b_i + c_i)\big)x^i \\ &= \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\max(n,p)} (b_i + c_i)x^i \\ &= f(x) + \left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sum_{i=0}^{p} c_i x^i\right) \\ &= f(x) + \big(g(x) + h(x)\big) \end{aligned}$$

Selanjutnya, ambil $f(x) \in R[x]$. Terdapat suku banyak nol pada $R[x]$, yaitu $O(x) = \sum_{i=0}^{m} 0x^i = 0$ sebagai unsur identitas pada $R[x]$, yang memenuhi

$$\begin{aligned} f(x) + O(x) &= \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} 0x^i \\ &= \sum_{i=0}^{m} (a_i + 0)x^i \\ &= \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \\ &= f(x) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} O(x) + f(x) &= \sum_{i=0}^{m} 0x^i + \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \\ &= \sum_{i=0}^{m} (0 + a_i)x^i \\ &= \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Untuk setiap $f(x) \in R[x]$ terdapat invers dari $f(x)$, yaitu $-f(x) = \sum_{i=0}^{m}(-a_i)x^i$ yang memenuhi

$$\begin{aligned} f(x) + \big(-f(x)\big) &= \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} (-a_i)x^i \\ &= \sum_{i=0}^{m} (a_i - a_i)x^i \\ &= \sum_{i=0}^{m} 0x^i \\ &= O(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Akan dibuktikan bahwa penjumlahan suku banyak memenuhi sifat komutatif. Ambil $f(x), g(x) \in R[x]$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (b_i + a_i) x^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \\ &= g(x) + f(x) \end{aligned}$$

Jadi, $R[x]$ terhadap operasi penjumlahan memenuhi aksioma grup komutatif.

Ambil $f(x), g(x) \in R[x]$. Terhadap operasi perkalian di $R[x]$ memenuhi sifat tertutup, sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m+n} d_i x^i \end{aligned}$$

dengan $d_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} \in R$ karena $a_i, b_i \in R$. Jadi $f(x)g(x) \in R[x]$. Selanjutnya terhadap perkalian sebagaimana telah didefinisikan di gelanggang $R[x]$ adalah asosiatif. Ambil $f(x), g(x, h(x)) \in R[x]$, sifat asosiatif pada operasi perkalian di $R[x]$ ditunjukkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\big(f(x)g(x)\big)h(x) &= \left(\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right)\right)\left(\sum_{i=0}^{p} c_i x^i\right)\\
&= \left(\sum_{i=0}^{m+n}\left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right)x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{p} c_i x^i\right)\\
&= \sum_{i=0}^{m+n+p}\left(\sum_{j=0}^{i}\left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}\right)c_{i-j}\right)x^i\\
&= \sum_{i=0}^{m+n+p}\left(\sum_{j+k+l=i} a_j b_k c_l\right)x^i\\
&= \sum_{i=0}^{m+n+p}\left(\sum_{j=0}^{i} a_j\left(\sum_{k=0}^{i-j} b_k c_{i-j-k}\right)\right)x^i\\
&= \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n+p}\left(\sum_{j=0}^{i} b_j c_{i-j}\right)x^i\right)\\
&= \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)\left(\left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{p} c_i x^i\right)\right)\\
&= f(x)\big(g(x)h(x)\big)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, ambil $f(x), g(x, h(x)) \in R[x]$. Sifat distributif operasi perkalian terhadap penjumlahan berlaku di $R[x]$, sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
f(x)(g(x)+h(x)) &= \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)\left(\left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right)+\left(\sum_{i=0}^{p} c_i x^i\right)\right)\\
&= \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\max(n,p)} (b_i + c_i)x^i\right)\\
&= \sum_{i=0}^{m+\max(n,p)}\left(\sum_{j=0}^{i} a_j\left(b_{i-j}+c_{i-j}\right)\right)x^i\\
&= \sum_{i=0}^{m+\max(n,p)}\left(\sum_{j=0}^{i}\left(a_j b_{i-j}+a_j c_{i-j}\right)\right)x^i\\
&= \sum_{i=0}^{m+n}\left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right)x^i + \sum_{i=0}^{m+p}\left(\sum_{j=0}^{i} a_j c_{i-j}\right)x^i\\
&= f(x)(g(x)+f(x)h(x)
\end{aligned}$$

dan

$$
\begin{aligned}
\big(f(x)+g(x)\big)h(x) &= \left(\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)+\left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right)\right)\left(\sum_{i=0}^{p} c_i x^i\right)\\
&= \left(\sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i+b_i)x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{p} c_i x^i\right)\\
&= \sum_{i=0}^{\max(m,n)+p}\left(\sum_{j=0}^{i}\big(a_{i-j}+b_{i-j}\big)\,c_j\right)x^i\\
&= \sum_{i=0}^{\max(m,n)+p}\left(\sum_{j=0}^{i}\big(a_{i-j}c_j+b_{i-j}c_j\big)\right)x^i\\
&= \sum_{i=0}^{\mathrm{m}+p}\left(\sum_{j=0}^{i} a_{i-j}c_j\right)x^i+\sum_{i=0}^{\mathrm{n}+p}\left(\sum_{j=0}^{i} b_{i-j}c_j\right)x^i\\
&= f(x)h(x)+g(x)h(x)
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa himpunan suku banyak $R[x]$ merupakan gelanggang terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

Teorema 4.4. Jika R adalah gelanggang komutatif, maka $R[x]$ juga merupakan gelanggang komutatif.

Bukti. Ambil $f(x), g(x) \in R[x]$ dengan $f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ dan $g(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \sum_{i=0}^{m+n}\left(\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}\right)x^i\\
&= \sum_{i=0}^{n+m}\left(\sum_{k=0}^{i} b_k a_{i-k}\right)x^i\\
&= g(x)f(x)
\end{aligned}
$$

Jadi, $R[x]$ adalah gelanggang komutatif dengan operasi perkalian. Sebelumnya, pada Teorema 4.3 telah dibuktikan bahwa $R[x]$ juga memenuhi sifat komutatif pada penjumlahan. Dengan demikian, $R[x]$ adalah gelanggang komutatif.

Teorema 4.5. Jika R mempunyai unsur satuan e, maka $R[x]$ juga mempunyai unsur satuan, yaitu ex^0.

Bukti. Ambil $f(x) \in R[x]$. Jika $1 \in R$ adalah unsur satuan di R, maka $1 = 1x^0$ dan untuk sebarang $f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i \in R[x]$ diperoleh

$$\begin{aligned}
1x^0 f(x) &= 1x^0\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{0+m} (1a_i)\, x^i \\
&= \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
f(x)1x^0 &= \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)1x^0 \\
&= \sum_{i=0}^{0+m} (a_i 1)\, x^i \\
&= \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Jadi, unsur $1 = 1x^0$ adalah unsur satuan di $R[x]$.

Teorema 4.6. Jika R suatu daerah integral, maka $R[x]$ juga tidak memuat pembagi nol sejati.

Bukti. Ambil $f(x), g(x) \in R[x]$. Misalkan R daerah integral. Diberikan sebarang suku banyak tak nol di $R[x]$. $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{m-1}x^{m-1} + a_mx^m$ dan $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ dengan a_m dan b_n adalah koefisien utama dari masing-masing $f(x)$ dan $g(x)$. Jadi $a_m \neq 0$ dan $b_n \neq 0$, akibatnya $a_mb_n \neq 0$ karena R daerah integral. Dengan demikian, diperoleh $f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + (a_mb_n)x^{m+n}$ dengan $f(x)g(x) \neq 0$ karena $a_mb_n \neq 0$. Jadi, $R[x]$ adalah daerah integral.

Dengan demikian, berdasarkan Teorema 4.3, Teorema 4.4 dan Teorema 4.5 struktur suku banyak merupakan suatu suku banyak atas gelanggang komutatif dan mempunyai unsur satuan. Lebih lanjut, menurut Teorema 4.6 struktur suku banyak atas gelanggang juga merupakan suatu daerah integral.

5. PENUTUP

Suku banyak atas gelanggang komutatif adalah suku banyak yang anggota-anggotanya merupakan unsur pada gelanggang komutatif. Himpunan suku banyak atas gelanggang komutatif yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian merupakan gelanggang dengan unsur satuan dan merupakan daerah integral. Untuk selanjutnya, penelitian ini dapat dilanjutkan untuk teorema pembagian pada suku banyak atas gelanggang komutatif. Selain itu dapat juga dilakukan pengkajian terkait suku banyak dengan mengubah unsur-unsurnya berupa matriks, sehingga diperoleh suku bayak dengan koefisien matriks atas gelanggang.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada Editor dan reviewer atas kritik dan sarannya. Terima kasih kepada jurusan Tadris Matematika IAIN Syekh Nurjati Cirebon atas masukan dan bimbingan yang telah diberikandan kepada semua pihak yang terlibat pada pembuatan jurnal ini baik secara langsung dan tidak langsung sehingga jurnal ini dapat terselesaikan.

REFERENSI

Abdurrazzaq, A., Wardayani, A., & Suroto. (2015). Ring Matriks atas Ring Komutatif. *Jurnal Pendidikan Matematika (JPM) Volume 7 No.1*, 11-18.

Andari, A. (2017). *Ring, Field dan Daerah Integral (Edisi Revisi).* Malang: UB Press.

Dewi, N. R. (2011). Analisis Struktur Daerah Integral dari Himpunan Polinomial Berdasarkan Struktur Polinomial Gelanggang. *Jurnal Penelitian Sains Volume 14 No. 4(A)*, 1-3.

Gallian, J. A. (2013). *Contemporary Abstract Algebra (8th ed).* Brook/Cole: Cengage Learning.

Misri, M. A. (2010). *Submodul Prima dalam Modul Perkalian.* Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Misri, M. A. (2017). *Struktur grup.* Cirebon: CV. Confident.

Misri, M. A. (2019). Propositional Proofing Techniques application in Algebraic Structure Research. *EduMa (Mathematics Education Learning and Teaching)*, 3.

Setiawan, A. (2011). *Aljabar Abstrak (Teori Grup dan Teori Ring).* Salatiga: Universitas Kristen Satya Wacana.

Subiono. (2016). *Aljabar: Sebagai Suatu Pondasi Matematika.* Surabaya: Jurusan Matematika ITS.

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. (2016). *Teori Ring dan Modul.* Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.